Universitatea "Politehnica" din Bucureşti

Facultatea de Automatică & Calculatoare

Identificarea Sistemelor

• *Lucrări de laborator* •

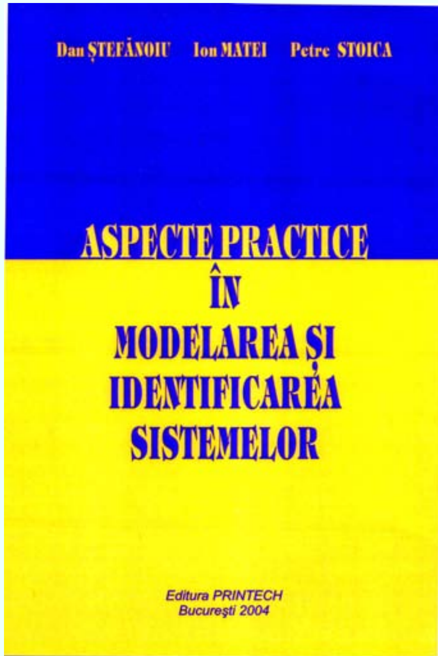
Dan Ştefănoiu

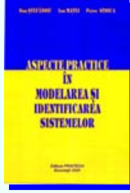
Profesor

Danny@router.indinf.pub.ro

http://www.geocities.com/dandusus/Danny.html

http://www.geocities.com/aplimathes/SISP





Sumar

☞ **Bibliografie**

☞ ⓿ Organizarea temelor de laborator

☞ ❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă ale proceselor stocastice

❷ Identificarea modelelor ne-parametrice

❸ Identificare parametrică prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate (MCMMP)

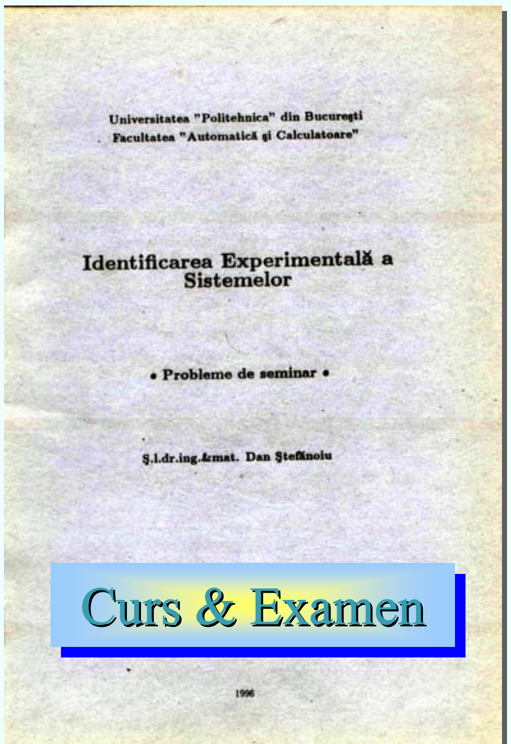
❹ Identificare parametrică prin Metoda Variabilelor Instrumentale (MVI)

❺ Identificare parametrică prin Metoda Minimizării Erorii de Predicţie (MMEP)

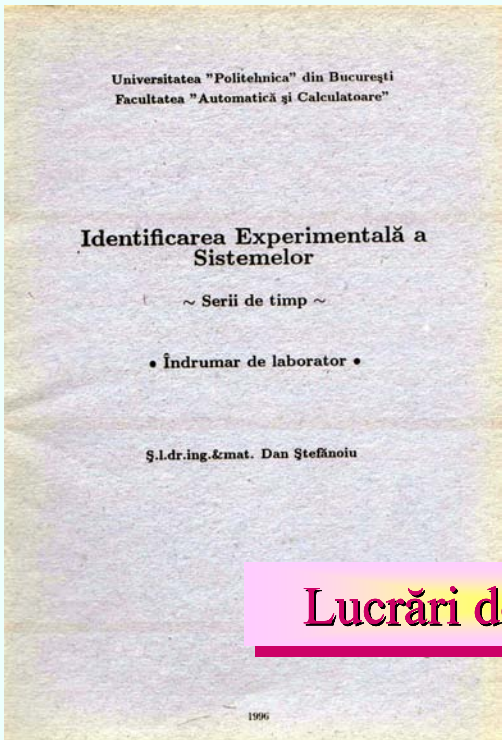
❻ Identificare recursivă

Bibliografie

1. Söderström T., Stoica P. – *System Identification*, Prentice Hall, London, UK, 1989.
2. Ştefănoiu D. – *Identificarea Experimentală a Sistemelor – Serii de Timp*, Tipografia Universității "Politehnica" din Bucureşti, 1996.
3. Ştefănoiu D. – *Identificarea Experimentală a Sistemelor – Probleme de Seminar*, Tipografia Universității "Politehnica" din Bucureşti, 1996.
4. Ştefănoiu D., Matei I., Stoica P. – *Aspecte Practice în Modelarea şi Identificarea Sistemelor*, Editura PRINTECH, Bucureşti, 1996.



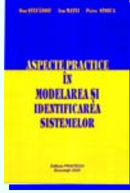
Curs & Examen



Lucrări de laborator

Referința fundamentală

⓿ Organizarea temelor de laborator



	Punctaj	Termen de predare
❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă	3 p	Săptămîna 3
❷ Identificarea modelelor ne-parametrice	9 p	Săptămîna 6
❸ Identificare parametrică prin MCMMP	7 p	Săptămîna 8
❹ Identificare parametrică prin MVI	8 p	Săptămîna 10
❺ Identificare parametrică prin MMEP	8 p	Săptămîna 12
❻ Identificare recursivă	5 p	Săptămîna 13
Total:	40 p	

Vacanţa de iarnă

☞ Prezentarea rezultatelor

- Programe/rutine (surse MATLAB), dacă este cazul.

  ☝ **Prim comentariu: Nume Prenume, grupă**

- Fişier `.DOC` sau `.PDF`

  `Nume_Prenume.DOC / Nume_Prenume.PDF`

- Antet

  Nume Prenume, grupa

  IS – Lucrarea de laborator nr. §

- Soluţii

  ➔ **Justificări matematice (dacă este cazul).**

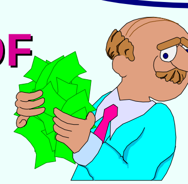
  ➔ **Grafice MATLAB incluse.**

  ➔ **Comentarii, interpretări.**

☞ Cîteva reguli

☑ **Regulile generale sunt precizate pe pagina Internet a cursului.**

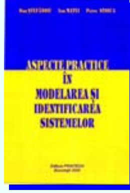
Cum se poate obţine punctajul maxim?



➔ **Originalitate/Onestitate**

➔ **Punctualitate**

☝ Fiecare zi de întîrziere aduce o penalizare de 2 puncte din totalul general.



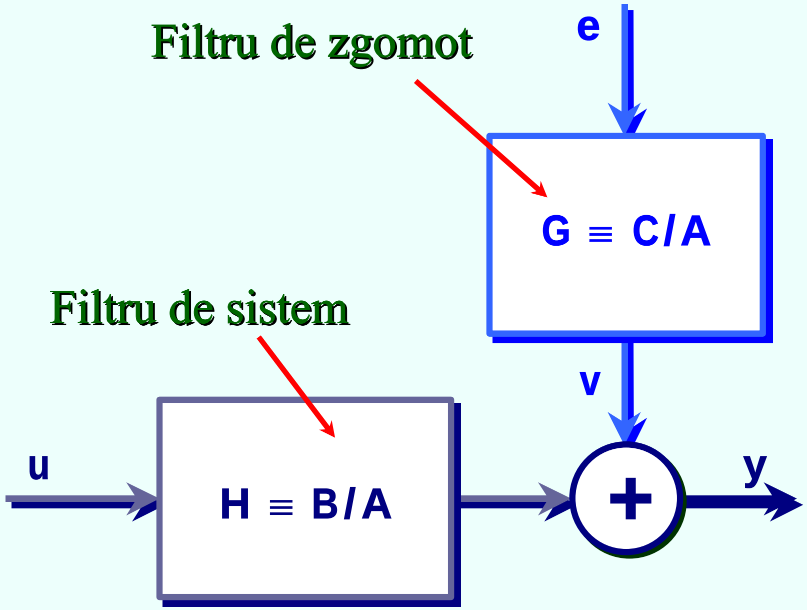
❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☞ Notaţii şi definiţii de bază

Clasa de modele ARMAX

$$\underbrace{A(q^{-1})y[n]}_{AR}=\underbrace{B(q^{-1})u[n]}_{X}+\underbrace{C(q^{-1})e[n]}_{MA}$$

Auto-Regresiv — Control eXogen — Medie Alunecătoare



- q^{-1} ⇒ Operatorul de întîrziere cu un pas.

$$\left(q^{-1}f\right)[n]=f[n-1]\quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

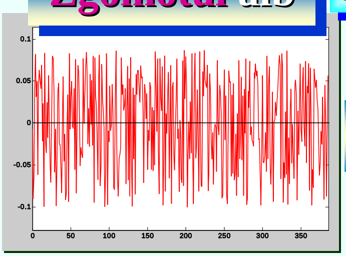
Polinoame

$$\begin{cases} A(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_{na}q^{-na} \\ B(q^{-1})=\quad b_1q^{-1}+\cdots+b_{nb}q^{-nb} \\ C(q^{-1})=1+c_1q^{-1}+\cdots+c_{nc}q^{-nc} \end{cases}$$

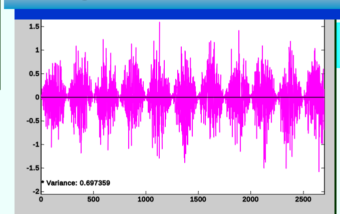
☝ intrarea nu se transmite instantaneu la ieşire

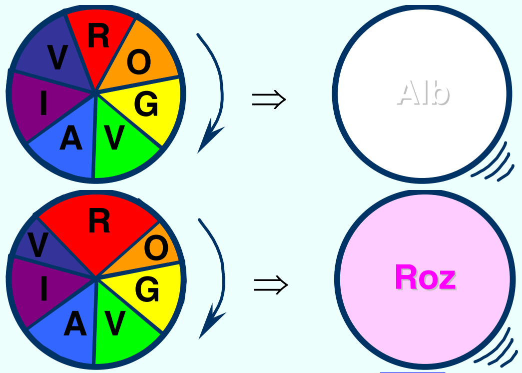
☝ zgomotul se transmite instantaneu la ieşire

Zgomotul alb e ⇒ proces stocastic total ne-autocorelat, impredictibil



Zgomotul colorat v ⇒ zgomot alb filtrat





❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☞ Notaţii şi definiţii de bază

Operatorul de mediere statistică $E\{y[n]\}$ ⇒ Media statistică a ieşirii procesului, pe ansamblul realizărilor, la momentul nT_e.

Ipoteza Ergodică

Media temporală a oricărei realizări suficient de îndelungate.

$$E\{y[n]\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y[n]$$

Auto-covarianţă & Covarianţă

$$r_u[k] \overset{def}{=} E\{u[n]u[n-k]\}$$

$$r_{uy}[k] \overset{def}{=} E\{u[n]y[n-k]\}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

Arată gradul de corelare dintre procese sau realizări ale aceluiaşi proces.

Transformată Fourier ⇒ **Densitate Spectrală de Putere**

Arată conţinutul în frecvenţă al proceselor.

Directă

$$X(e^{j\omega}) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-j\omega n}, \quad \forall\omega\in\mathbb{R}$$

$$\phi_{u,uy}(\omega) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{u,uy}[k]e^{-j\omega n}, \quad \forall\omega\in\mathbb{R}$$

Inversă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{+j\omega n}d\omega, \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$r_{u,uy}[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{u,uy}(\omega)e^{+j\omega n}d\omega, \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

☝ determinist ☝ nedeterminist

❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☝ determinist

Timp

Analiza tranzitorie

Sistem

u → h[k] , H($e^{j\omega}$) → y

Frecvenţă

Analiza în frecvenţă

- Pentru estimarea timpului mort şi/sau a funcţiei pondere.
- Utilitate redusă în IS.

- Pentru estimarea răspunsului în frecvenţă.

$$y \equiv h * u \quad \Leftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$$

$$u[n] = u_0 \sin(\omega_0 n)$$
$$y[n] = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = u_0 \left| H(e^{j\omega_0}) \right|$$ ← Se poate trasa pentru diferite valori ale lui ω_0.

$$\varphi = \arg H(e^{j\omega_0})$$ ← Dificil de estimat!

O strategie

- Pentru: $\omega_0 = 2\pi m_0 / n_0$ $\quad m_0, n_0 \in \mathbb{N}^*$

$$N = 2\pi m_0 K / \omega_0 = K n_0$$

înmulţire cu sin şi cos

☝ Rezultat sensibil la perturbaţii.

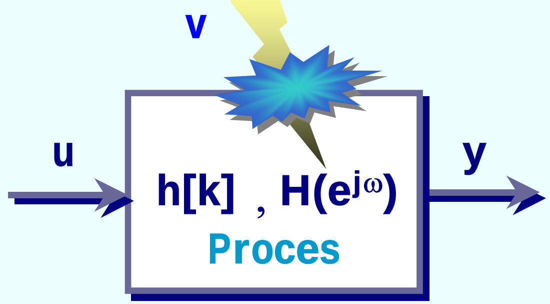
$$\begin{cases} y_s[n] \overset{def}{=} y[n]\sin(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 n) = \dfrac{y_0}{2}\cos\varphi - \dfrac{y_0}{2}\cos(2\omega_0 n + \varphi) \\ y_c[n] \overset{def}{=} y[n]\cos(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 n) = \dfrac{y_0}{2}\sin\varphi + \dfrac{y_0}{2}\sin(2\omega_0 n + \varphi) \end{cases}$$

mediere temporală

$$\begin{cases} \bar{y}_s = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y_s[n] = \dfrac{y_0}{2}\cos\varphi \\ \bar{y}_c = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y_c[n] = \dfrac{y_0}{2}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{atan2}\left(\frac{\bar{y}_c}{\bar{y}_s}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\cos(\omega_0 n)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\sin(\omega_0 n)}\right)$$

❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☝ nedeterminist



Timp

Analiza bazată pe corelaţie

- Pentru estimarea secvenţelor de (auto-)covarianţă.

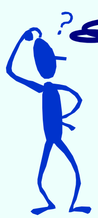
Frecvenţă

Analiza spectrală

- Pentru estimarea densităţilor spectrale de putere.

Ce devine echivalenţa:

$y \equiv h * u$ ⟺ $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$?



Operatorul de mediere statistică este actorul principal.

$$r_{uy}[k] = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h[m] r_u[k-m]$$

$$r_y[k] = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in\mathbb{Z}} h[p]h[q] r_u[k+p-q]$$

⟺

$$\phi_{uy}(\omega) = H(e^{j\omega})\phi_u(\omega)$$

$$\phi_y(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega)$$

Transferul densităţii spectrale prin sisteme liniare

O strategie complementară

E ② | $\times y[n-k]$ ① | $A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n]$ ← Ecuaţie cu diferenţe.

☝ Soluţie analitică sau recursivă pentru modelele uzuale.

$$A(q^{-1})r_y[k] = B(q^{-1})r_{uy}[k] + C(q^{-1})r_{ey}[k]$$

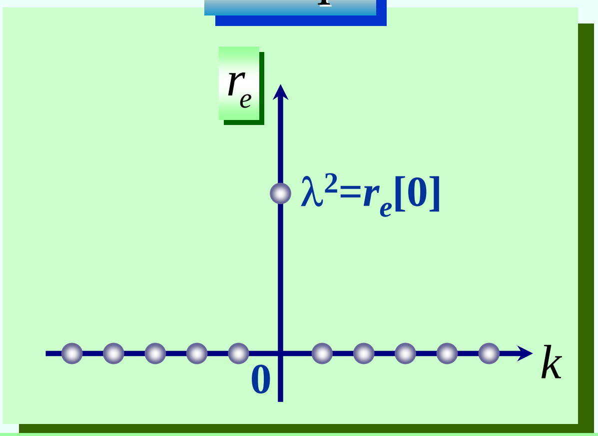
$\forall k \in \mathbb{N}$

← Ecuaţie cu secvenţe de covarianţă.

❶ Caracterizări în timp și frecvență

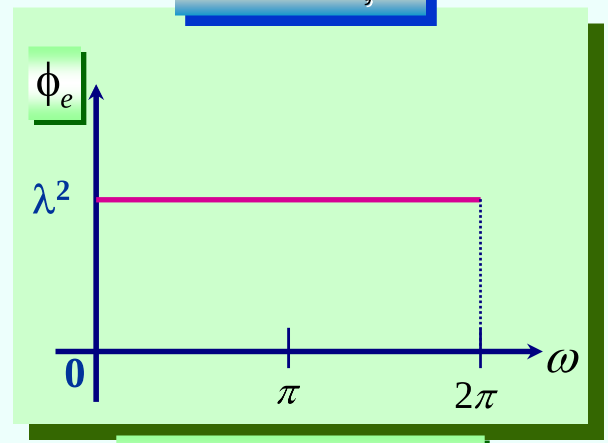
☞ Caracterizări ale zgomotului alb

Timp



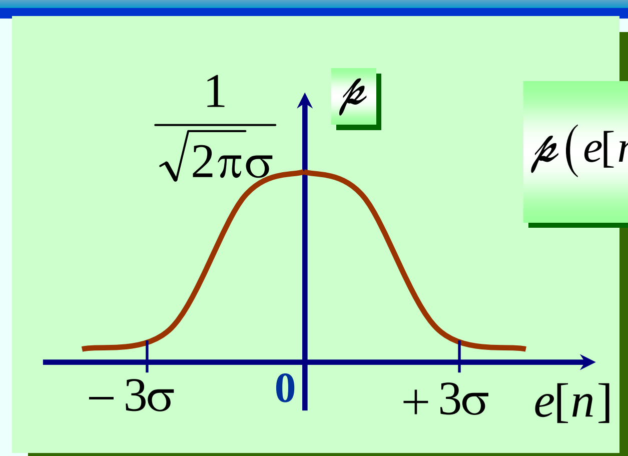
$$r_e[k] = E\left\{e[n]e[n \pm k]\right\} = \lambda^2 \delta_0[k], \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Frecvență

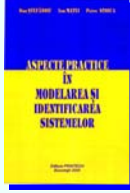


$$\phi_e(\omega) = \lambda^2, \;\; \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Densitate de probabilitate Gaussiană



$$\wp(e[n]) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{e^2[n]}{2\sigma^2}\right], \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$



❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☞ Probleme de simulare

Contextul de lucru

2 modele

$$H_1(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} \qquad H_2(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} \qquad (45)$$

ordin 1 ordin 2

Programe disponibile

\# **ISLAB_1A**

- Apel: `islab_1a(C,A,N,tau_max,nr) ;`
- Modul de calcul al valorilor adevărate şi estimate pentru secvenţe de auto-covarianţă obţinute cu ajutorul unui proces ARMA[1,1]. Sunt trasate graficele secvenţelor obţinute. Este de asemenea trasată o realizare a zgomotului colorat rezultat. Argumentele funcţiei sunt următoarele:

C	polinomul MA (vector [1 c]);
A	polinomul AR (vector [1 a]);
tau_max	pivotul maxim al secvenţelor de auto-covarianţă (implicit: 50);
nr	numărul realizărilor de generat (implicit: 1).

❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

Programe disponibile

☞ **Probleme de simulare**

ISLAB_1B

- Apel: `islab_1b(x,y,SNR) ;`
- Modul care simulează dependenţa de SNR a polilor şi zerourilor unui model ARMA[2,2], determinat prin echivalarea sa cu un model AR afectat de 2 zgomote necorelate (ca în **Exerciţiul 1.4**). Argumentele funcţiei sunt:
  - **x** partea reală a polilor modelului AR (implicit: 0.5);
  - **y** partea imaginară a polilor modelului AR (implicit: 0.5);
  - **SNR** raportul semnal-zgomot (implicit: 3).

Rutine disponibile

D_SPEKTR

- Apel: `[w,fi]=d_spektrum(A,B,sigma2) ;`
- Rutină auxiliară de evaluare a spectrului ieşirii unui filtru liniar discret stimulat cu un zgomot alb. Argumentele funcţiei sunt următoarele:
  - **A** numitorul funcţiei de transfer a filtrului (polinom);
  - **B** numărătorul funcţiei de transfer a filtrului (polinom);
  - **Sigma2** varianţa zgomotului alb de la intrare.

  Funcţia returnează:
  - **w** axa pulsaţiilor (ω);
  - **fi** densitatea spectrală ϕ_y a zgomotului colorat (de ieşire).

Rutine disponibile

NOISE

- Apel: `noise(operation) ;`
- Modul de generare şi simulare a zgomotelor colorate produse de modelele stocastice (45). Argumentul funcţiei (`operation`) este un şir de caractere din mulţimea următoare:

`close_noise`	
`close_noise_def`	
`init_noise`	
`move_p`	
`move_z`	
`moved_p`	
`moved_z`	
`moving_p`	
`moving_z`	
`noiseclear`	
`show`	(implicit)
`system`	
`winit_noise`	

SPEFAC

- Apel: `[a,l2]=spefac(r) ;`
- Rutină auxiliară de rezolvare a *Problemei factorizării spectrale*. Aceasta constă în determinarea unui polinom:

$$A(z) \stackrel{def}{=} z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

şi a varianţei λ^2 cu proprietatea:

$$\lambda^2 A(z) A(z^{-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} r[k]\left(z^k + z^{-k}\right), \qquad (46)$$

pentru o secvenţă de covarianţă $\{r[0], r[1], \ldots, r[n]\}$. În mod normal, această problemă se poate formula pentru orice secvenţă de numere $\{r[0], r[1], \ldots, r[n]\}$, cu condiţia să fie *pozitiv definită*, adică verificînd inegalitatea:

$$|r[k]| \leq r[0], \quad \forall k \in \overline{0,n}. \qquad (47)$$

Problema factorizării spectrale (46) este rezolvată în cazul determinării unui model AR[n] atunci cînd este stimulat de un zgomot alb şi se cunoaşte densitatea spectrală de putere a ieşirii (deci şi secvenţa de auto-covarianţă a ieşirii, cu ajutorul formulei de inversiune (12)).

Argumentul funcţiei **spefac** este **r** – secvenţa de (auto-)covarianţă (vector).

Funcţia returnează:

a coeficienţii polinomului AR (vector);

l2 varianţa zgomotului alb λ^2 cu care trebuie stimulat modelul AR pentru a obţine la ieşire exact secvenţa de auto-covarianţă **r**.

❶ Caracterizări în timp şi frecvență

☞ Probleme de simulare

3 p

Problema 1.1 1p

Pentru a rezolva punctele următoare, se va utiliza funcția **NOISE**.

1. Să se testeze grafic dacă filtrul obținut în **Exercițiul 1.3** (de tipul lui H_1 din definiția (45)) este corect.
2. Să se varieze polii filtrului H_2 din definiția (45) şi să se comenteze rezultatele obținute cu ajutorul funcției **NOISE**.
3. Unde trebuie amplasați polii filtrului H_2 pentru a obține un filtru trece jos?
4. Unde trebuie amplasați polii filtrului H_2 pentru a obține un vîrf de rezonanță la $\omega = 1$? Ce se poate spune despre conținutul în frecvență al semnalului analizînd realizările procesului?
5. Ce efect observați atunci cînd filtrul H_2 are zeroul în vecinătatea cercului unitar?

Problema 1.2 **1p**

Să se utilizeze modulul de simulare **`ISLAB_1A`** pentru a simula un proces stocastic de model ARMA[1,1]. De exemplu, pentru a genera un process de tip AR[1] cu un singur pol in –0.9, se foloseşte sintaxa:

```
islab_1a(1,[1 0.9]) ;
```

În mod implicit, modulul de simulare alege: **`N=100`**, **`tau_max=50`** şi **`nr=1`**.

1. Să se analizeze maniera în care estimaţiile funcţiilor de covarianţă variază cu **`N`** (numărul de eşantioane) şi **`tau_max`** (pivotul maximal al secvenţei de auto-covarianţă) pentru diferite locaţii ale polilor.
2. Să se verifice faptul că estimaţiile funcţiilor de covarianţă tind către valorile adevărate pentru procese de tip AR[1] şi MA[1], pe măsură ce **`N`** tinde către infinit.
3. Să se verifice corectitudinea rezultatelor obţinute la **Exerciţiile 1.1** şi **1.2**.

❶ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☞ Probleme de simulare

Problema 1.3 **1p**

Se consideră un proces stocastic asociat unui model AR[2] cu două surse de zgomot (ca în contextul **Exerciţiului 1.4**), pe care dorim să îl echivalăm cu un proces descris de un model ARMA[2,2], avînd o singură sursă de zgomot. Pentru simulările care urmează, se va utiliza modulul **`ISLAB_1B`**.

1. Să se analizeze maniera în care variază polii şi zerourile modelului ARMA atunci cînd variază SNR. În acest context, SNR este definit prin raportul dintre varianţa semnalului util x şi varianţa zgomotului aditiv v (cu notaţiile din **Exerciţiul 1.4**).
2. Să se studieze cazurile în care SNR tinde la infinit (semnalul domină zgomotul) şi SNR tinde la zero (zgomotul domină semnalul). Să se comenteze modificările înregistrate de densităţile spectrale.